<http://mathmetods.ucoz.com/index/osnovnye_ponjatija/0-9>

**Основные понятия**

**Понятие СМО**

Системы массового обслуживания (СМО) - это системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы на выполнение каких-либо услуг, с другой - происходит удовлетворение этих запросов.

Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике.

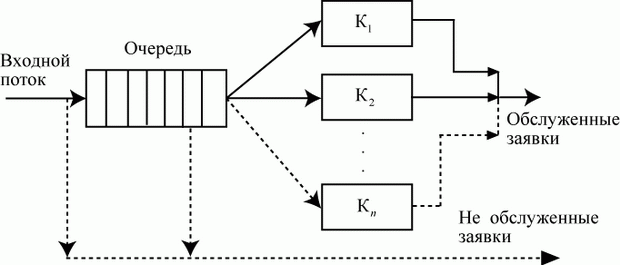
В борьбу за клиентов в современной экономике вкладываются огромные средства. По оценкам западных экономистов, завоевание фирмой нового клиента обходится ей в 6 раз дороже, чем удержание существующих покупателей.  А если клиент ушел неудовлетворенным, то на его возвращение приходится потратить в 25 раз больше средств.

Во многих случаях неудовлетворенность клиент вызвана неудачной организацией его обслуживания (слишком долгое ожидание в очереди, отказ в обслуживании и т.д.). Использование теории массового обслуживания позволяет фирме избежать подобных неприятностей.

**Структура СМО**

Системы массового обслуживания включают следующие элементы:

* Источник требований;
* Входящий поток требований;
* Очередь;
* Обслуживающие устройства (каналы обслуживания);
* Выходящий поток требований



***Заявками*** могут быть производственные и торговые заказы, заявки на ремонт станков, посадку самолетов в аэропорту и заправку и автомобилей на автозаправочной станции. ***Канал обслуживания*** может представлять собой совокупность устройств, этап производственного процесса, аэропорт и т.д. Интервалы между последовательными заявками и продолжительность их обслуживания являются случайными величинами.

**Примеры СМО**

1) *В торговле.* Определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры

2) *Склады.* Установить оптимальное соотношение между числом поступающих на базу требований на обслуживание и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными.

3) *Расчет площади складских помещений.* Складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство, а прибытие транспортных средств под выгрузку как требование.

4) *Модель производственной фирмы,* включает несколько цехов, которые последовательно участвуют в процессе производства некоторого изделия, заказы на изготовление изделия поступают в случайные моменты времени.

5) *Модель управленческого звена фирмы,* состоит из начальника изаместителей, которые принимают участие в приеме посетителей. В процессе моделирования требуется обеспечить одинаковую занятость участников процесса.

6) *Модель бензоколонки.* Количество автомобилей - случайная величина.

7) *Модели в коммерческий деятельности предприятия.* Коммерческая деятельность: погрузка товаров, перевозка, разгрузка, хранение, обработка, фасовка, реализация, а также операции с платежными документами, тарой, деньгами, автомашинами, клиентами и т.п.

Для коммерческой деятельности характерны массовость поступления товаров, денег, посетителей в случайные моменты времени. Время их обслуживания носит также случайный характер.

**Характеристики эффективности СМО**

В качестве характеристик эффективности функционирования СМО можно выбрать три основные группы.

1) Показатели эффективности использования СМО:

* Абсолютная пропускная способность СМО - среднее число заявок, которое сможет обслужить СМО в единицу времени.
* Относительная пропускная способность СМО - отношение среднего числа заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших за это же время заявок.
* Среднеяя продолжительность периода занятости СМО.
* Коэффициент использования СМО - средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием заявок и т.п.

2) Показатели качества обслуживания заявок:

* Среднее время ожидания заявки в очереди.
* Среднее время пребывания заявки в СМО.
* Вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания.
* Вероятность того, что вновь поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию.
* Закон распределения времени ожидания заявки в очереди.
* Закон распределения времени пребывания заявки в СМО.
* Среднее число заявок, находящихся в очереди.
* Среднее число заявок, находящихся в СМО и т.п.

3) Показатели эффективности функционирования пары "СМО - Клиент", где под "клиентом" понимают всю совокупность заявок или некий их источник.

К числу таких показателей относится, например, средний доход, приносимый СМО в единицу времени и т.п.

**Классификация СМО**

***1) По месту нахождения источника требований.***

*Разомкнутые* - источник требования находится вне системы. Примером разомкнутой системы может служить ателье по ремонту телевизоров (магазины, кассы вокзалов, портов …). Здесь неисправные телевизоры — это требования, источник требований находятся вне системы, число требований можно считать неограниченным. Это система с неограниченным потоком требований.

*Замкнутые* - источник находится в самой системе. К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником требований на их обслуживание бригадой наладчиков. Каждый налаженный станок становится потенциальным источником требований на новую накладку. В подобных системах общее число требований конечно и чаще всего постоянно.

***2) По характеру образования очереди.***

*С ожиданием* - требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов.

*a) С ограничением на длину очереди* (с ограниченным числом требований в очереди).

*b) С ограничением на время пребывания в очереди* (ограниченным сроком пребывания каждого требования в очереди).

*С отказами* - требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и теряются. Примером системы с отказами является телефонная станция. Если вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и теряется.

***3) По наличию приоритета.***

*Без приоритета:*

*a)* первый пришел - первый ушел

*b)* последним пришел - первым ушел

*с)* случайный отбор

*С приоритетом:*

*a)* абсолютный приоритет

*b)* относительный приоритет

*с)* специальные правила приоритета

***4) По количеству каналов.***

*Многоканальные:*

*a)* с однородными каналами

*b)* с неоднородными каналами

*с)* с параллельно расположенными каналами

*d)* с последовательно расположенными каналами

*Одноканальные*

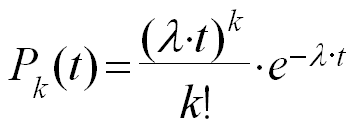
**Потоки событий**

Под потоком событий понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток покупателей, поток заказных писем, поступающих в почтовое отделение и т.п.).

Поток характеризуется интенсивностью λ – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени. Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени.

Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным. Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах, но представляет интерес как предельный случай. Типичным для системы массового обслуживания является случайный поток заявок.

Наиболее разработаны и удобны в практических приложениях методы решения, в которых входящий поток требований является простейшим (пуассоновским). Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления за время t k требований задается формулой:



λ – математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени

Простейший поток обладает тремя основными свойствами:

1) ординарности

2) стационарности

3) отсутствием последействия

***Ординарность*** потока означает практическую невозможность одновременного поступления двух и более требований. Например, достаточно малой является вероятность того, что из группы станков, обслуживаемых бригадой ремонтников, одновременно выйдут из строя сразу несколько станков.

***Стационарным*** называется поток, для которого математическое ожидание числа требований, поступающих в систему в единицу времени (λ), не меняется во времени. Таким образом, вероятность поступления в систему определенного количества требований в течение заданного промежутка времени ∆t зависит от величины промежутка и не зависит от начала его отсчета.

***Отсутствие последействия*** означает, что число требований, поступивших в систему до момента t, не определяет того, сколько требований поступит в систему за промежуток времени от t до t + ∆t. Например, если на ткацком станке в данный момент произошел обрыв нити, и он устранен ткачихой, то это не определяет, произойдет новый обрыв на данном станке в следующий момент или нет, тем более это не влияет на вероятность возникновения обрыва на других станках.

**Виды СМО**

**1. СМО с отказами**

В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

**а) Одноканальная СМО с отказами**

Наиболее простой из рассматриваемых задач в рамках теории массового обслуживания является модель одноканальной СМО с отказами. В данном случае количество каналов равно 1. Этот канал принимает пуассоновский поток заявок. Если заявка прибыла в канал, который в данный момент не является свободным, она получает отказ и больше не числится в системе.

**Показатели эффективности**

A – абсолютную пропускную способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени.

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_3.png

Q – относительную пропускную способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой (или вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена).

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_1.png

Pотк – вероятность отказа – вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной.

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_2.png

λ — среднее число требований, поступающих за единицу времени, 1/μ — среднее время обслуживания одним каналом одного требования.

**б) Многоканальная СМО с отказами**

В многоканальных СМО имеется *n* каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ . Поток каждого канала имеет интенсивность μ. Если в момент прибытия заявки нет свободных каналов, то эта заявка получает отказ и больше не числится в системе.

**Показатели эффективности**

1. Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_4.png

2. Вероятность того, что занято ровно k обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих аппаратов

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_5.png

3. Вероятность того, что занято ровно k обслуживающих каналов при условии, что общее число требований, находящихся на обслуживании, превосходит число обслуживающих аппаратов

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_6.png

4. Вероятность того, что все обслуживающие каналы заняты

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_7.png

5. Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_8.png

6. Абсолютная пропускная способность получается умножением интенсивности заявок на относительную пропускную способность

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_9.png

7. Среднее число каналов занятых обслуживанием

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_10.png

8. Среднее время ожидания начала обслуживания в системе

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_11.png

9. Среднее число свободных от обслуживания каналов:

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_12.png

10. Коэффициент простоя каналов:

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_13.png

11. Коэффициент загрузки каналов

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_14.png

**2. СМО с ожиданием**

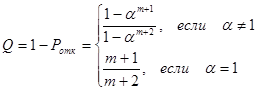
**a) Одноканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди**

Рассмотрим одноканальную СМО, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Предположим, что поток обслуживаний также простейший с интенсивностью μ . Это означает, что непрерывно занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени. Заявка, поступившая в СМО в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Далее предполагаем, что в системе имеется ограничение на длину очереди, предполагаем, что в очереди могут находиться максимум m (m≥1) заявок. Поэтому заявка, пришедшая на вход СМО, в момент, когда в очереди уже стоят m заявок, получает отказ и покидает систему не обслуженной.

**Основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием**

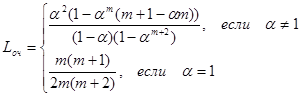
1. Относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, поступающих в единицу времени



2. Абсолютная пропускная способность системы

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_16.png

3. Среднее число заявок в очереди *Lоч* определяется как математическое ожидание случайной величины – числа заявок, стоящих в очереди:

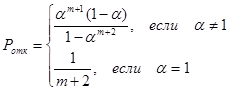


4. Важной характеристикой СМО с ожиданием является среднее время ожидания заявки в очереди *Tоч* . которая называется формулой Литтла

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_18.png

т.е. среднее время ожидания заявки в очереди равно среднему числу заявок в очереди ,деленному на интенсивность λ входящего потока заявок

5. Вероятность отказа



**б) Одноканальная СМО с неограниченным ожиданием**

Если λ > μ (α > 1), т.е. среднее число заявок, поступивших в систему за единицу времени, больше среднего числа обслуживаемых заявок за то же время при непрерывно работающем канале, то очевидно, что очередь неограниченно растет. В этом случае предельный режим не устанавливается и предельных вероятностей состояний не существует (они равны нулю).

В случае λ = μ (α = 1) при условии, что входящий поток заявок и поток обслуживаний регулярные (заявки поступают через равные интервалы времени, и время обслуживания одной заявки является постоянным, равным интервалу времени между поступлениями заявок), очереди не будет и канал будет обслуживать заявки непрерывно.

Но если входящий поток или поток обслуживаний становится случайным, очередь начинает расти до бесконечности. Поэтому далее при рассмотрении указанных систем будем предполагать, что λ < μ ,т.е. α < 1. При этом условии с течением времени устанавливается предельный режим, и предельные вероятности состояний существуют.

При отсутствии ограничений на очередь каждая заявка, поступившая в СМО, будет обслужена. Поэтому вероятность отказа равна нулю *Pотк = 0*. Следовательно, вероятность того, что поступившая заявка будет принята в систему,так же как и относительная пропускная способность равна единице *Q = 1 - Pотк = 1*.

Тогда для абсолютной пропускной способности *A* (и интенсивности выходящего потока) будем иметь: *A = λQ = λ* , т.е. интенсивности входящего и выходящего потоков совпадают.

**Основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием**

1. Среднее число заявок в очереди

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_20.png

2. Среднее время ожидания заявки в очереди по формуле Литтла равно

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_21.png

3. Среднее время пребывания заявки в СМО складывается из среднего времени заявки в очереди и среднего времени обслуживания заявки :

http://mathmetods.ucoz.com/images/SMO_22.png